

Курс: Функциональное программирование
Практика 3. Просто типизированное λ -исчисление.

Разминка

- ▶ Придумайте контекст Γ , в котором верны утверждения типизации

$$\begin{aligned}\Gamma &\vdash x : \alpha \\ \Gamma &\vdash xy : \alpha \\ \Gamma &\vdash xy : \alpha \rightarrow \beta \\ \Gamma &\vdash \lambda x. y : \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \\ \Gamma &\vdash \lambda x. y : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \\ \Gamma &\vdash \lambda x. x : (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \\ \Gamma &\vdash \lambda x. x : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha\end{aligned}$$

- ▶ Запишите приведённые выше утверждения типизации в стиле Чёрча.

Стандартные типы

- ▶ Какой тип можно приписать булевым значениям

$$\begin{aligned}\text{tru} &\equiv \lambda t f. t \\ \text{fls} &\equiv \lambda t f. f\end{aligned}$$

- ▶ Типизируйте комбинаторы `not` (обе версии), `if` и `and`.

- ▶ Какой тип можно приписать парам

$$\text{pair} \equiv \lambda x y f. f x y$$

- ▶ Типизируйте комбинаторы `fst` и `snd`.

- ▶ Какой тип можно приписать числам Чёрча

$$\begin{aligned}0 &\equiv \lambda s z. z \\ 1 &\equiv \lambda s z. s z \\ 2 &\equiv \lambda s z. s (s z) \\ 3 &\equiv \lambda s z. s (s (s z)) \\ 4 &\equiv \lambda s z. s (s (s (s z))) \\ &\dots\end{aligned}$$

- ▶ Типизируйте комбинаторы `suc` и `iszero`.

- ▶ Какой тип можно приписать спискам

$$[] \equiv \text{nil} \equiv \lambda c n. n$$

$$[2] \equiv \text{cons } 2 \text{ nil} \equiv \lambda c n. c \ 2 \ n$$

$$[3, 2] \equiv \text{cons } 3 \ (\text{cons } 2 \ \text{nil}) \equiv \lambda c n. c \ 3 \ (c \ 2 \ n)$$

$$[5, 3, 2] \equiv \text{cons } 5 \ (\text{cons } 3 \ (\text{cons } 2 \ \text{nil})) \equiv \lambda c n. c \ 5 \ (c \ 3 \ (c \ 2 \ n))$$

Вывод типа

Определите тип следующих комбинаторов

- ▶ $\mathbf{B} = \lambda f g x. f (g x)$

- ▶ $\mathbf{C} = \lambda f x y. f y x$

- ▶ $\mathbf{S} = \lambda f g x. f x (g x)$

Постройте для одного из них дерево вывода типа.

Определите тип комбинаторов

- ▶ $\lambda x y. x (y x x)$

- ▶ $\lambda x y. x y x$

Тип комбинатора неподвижной точки

Пусть мы решили расширить исчисление комбинатором неподвижной точки fix с правилом δ -редукции

$$\text{fix } f \rightarrow_{\delta} f(\text{fix } f)$$

- ▶ Какой тип можно было бы ему приписать непротиворечивым образом?
- ▶ В определении факториала

$$\text{fac} = \lambda n. \text{if } (\text{iszro } n) \ 1 \ (\text{mult } n \ (\text{fac } (\text{pred } n)))$$

$$\text{fac} = \underbrace{(\lambda f n. \text{if } (\text{iszro } n) \ 1 \ (\text{mult } n \ (f (\text{pred } n))))}_{\text{fac}'}$$

$$\text{fac} = \text{fix } \text{fac}'$$

найдите тип fac , fac' и fix . (Используйте сокращение Nat для типа чисел Черча.)

Экспансия субъекта

Операция, обратная β -редукции называется экспансией (расширением). Множество типизируемых в $\lambda \rightarrow$ термов **не замкнуто** относительно экспансии:

$$M \rightarrow_{\beta} N \wedge \Gamma \vdash N : \sigma \not\Rightarrow \Gamma \vdash M : \sigma$$

Действительно, рассмотрим терм $\mathbf{KI}\Omega$ ($\mathbf{I} \equiv \lambda x. x$, $\mathbf{K} \equiv \lambda x y. x$, $\Omega \equiv \lambda x. x x$). Хотя $\mathbf{KI}\Omega \rightarrow_{\beta} \mathbf{I}$:

$$\mathbf{KI}\Omega \rightarrow_{\beta} (\lambda y. \mathbf{I}) \Omega \rightarrow_{\beta} \mathbf{I}$$

и $\vdash \mathbf{I} : \sigma \rightarrow \sigma$, но $\not\vdash \mathbf{KI}\Omega : \sigma \rightarrow \sigma$, поскольку последнее содержит нетипизируемый подтерм.

Для $\lambda \rightarrow$ а ля Чёрч экспансия не сохраняет тип только из-за возможного наличия нетипизируемого подтерма.

Для $\lambda \rightarrow$ а ля Карри верно более сильное отрицание:

$$M \rightarrow_{\beta} N \wedge \Gamma \vdash M : \sigma \wedge \Gamma \vdash N : \tau \not\Rightarrow \Gamma \vdash M : \tau$$

Покажем это на примере.

Возьмём $M \equiv \mathbf{SK}$ и $N \equiv \mathbf{K}_*$.

$$\mathbf{S} \equiv \lambda f g z. f z (g z) \quad \vdash \mathbf{S} : (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$$

$$\mathbf{K} \equiv \lambda x y. x \quad \vdash \mathbf{K} : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$$

$$\vdash (\mathbf{SK}) : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma$$

$$\mathbf{K}_* \equiv \lambda x y. y \quad \vdash \mathbf{K}_* : \tau \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma$$

$$\mathbf{SK} \rightarrow_{\beta} \lambda g z. \mathbf{K} z (g z) \rightarrow_{\beta}$$

$$\rightarrow_{\beta} \lambda g z. (\lambda y. z) (g z) \rightarrow_{\beta} \lambda g z. z \equiv_{\alpha} \mathbf{K}_*$$

В красной редукции потерялась информация о типе g , как о функциональном, $(g z) : \tau \Rightarrow z : \sigma, g : \sigma \rightarrow \tau$.

Для $\lambda \rightarrow$ в стиле Чёрча информация не теряется:

$$\mathbf{S}_{\sigma\tau\rho} \equiv \lambda f^{\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho} g^{\sigma \rightarrow \tau} z^{\sigma}. f z (g z)$$

$$\mathbf{K}_{\sigma\tau} \equiv \lambda x^{\sigma} y^{\tau}. x$$

$$\mathbf{S}_{\sigma\tau\sigma} \mathbf{K}_{\sigma\tau} \rightarrow_{\beta} \lambda g^{\sigma \rightarrow \tau} z^{\sigma}. \mathbf{K}_{\sigma\tau} z (g z) \rightarrow_{\beta}$$

$$\rightarrow_{\beta} \lambda g^{\sigma \rightarrow \tau} z^{\sigma}. (\lambda y^{\tau}. z) (g z) \rightarrow_{\beta} \lambda g^{\sigma \rightarrow \tau} z^{\sigma}. z$$

$$\equiv_{\alpha} \lambda x^{\sigma \rightarrow \tau} y^{\sigma}. y \equiv \mathbf{K}_{*(\sigma \rightarrow \tau)\sigma}$$

Можно переименовать связанные переменные, но не их типы.

Домашнее задание

Если не указано иное, в задачах подразумевается простая система типов в стиле Карри.

Найдите замкнутые термы в нормальной форме, являющиеся обитателями типа (1 балл)

- ▶ $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha$
- ▶ $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \beta$
- ▶ $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
- ▶ $\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$

Сколько разных с точностью до α -эквивалентности нормализованных термов каждого типа вы можете привести?

Найдите замкнутые термы в нормальной форме, являющиеся обитателями типа (2 балла)

- ▶ $(\delta \rightarrow \delta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\delta \rightarrow \beta) \rightarrow \delta \rightarrow \gamma$
- ▶ $(\delta \rightarrow \delta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \delta \rightarrow \gamma \rightarrow \beta$ (2 штуки)

Типизируйте по Чёрчу (2 балла)

- ▶ **SKK**
- ▶ **SKI**

(Обратите внимание, что в задании НЕТ указания редуцировать терм.)

Сконструируйте замкнутый, находящийся в нормальной форме терм типа

- ▶ $(\gamma \rightarrow \epsilon) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \epsilon) \rightarrow \epsilon) \rightarrow \epsilon$

которому нельзя было бы приписать тип $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \epsilon) \rightarrow \epsilon$. (2 балла)

Сконструируйте замкнутый, находящийся в нормальной форме терм типа

- ▶ $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$
 - ▶ $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$
- (3 балла)