

Курс: Функциональное программирование
Практика 1. Чистое лямбда-исчисление как язык
программирования

Разминка

- Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:

$$[x \mapsto w (\lambda x. w x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

$$[y \mapsto w (\lambda x. w x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

$$[z \mapsto w (\lambda x. w x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

$$[x \mapsto w (\lambda x. y x)] \quad x y (\lambda z y. z x (w x) y)$$

Определите, возможно ли в получившемся терме выполнить β -преобразование.

- Уберите лишние скобки и при возможности выполните β -преобразование

$$((\lambda z. (z (y z))) (z x) z)$$

- Эквивалентны ли термы:

$$\begin{aligned} &\lambda x. x \\ &\lambda y. y \\ &\lambda x y. x y \end{aligned}$$

Булевы значения можно определить так:

$$\begin{aligned} \text{tru} &\equiv \lambda t f. t \\ \text{fls} &\equiv \lambda t f. f \end{aligned}$$

Стандартные булевые операции кодируются так:

$$\begin{aligned} \text{if} &\equiv \lambda b x y. b x y \\ \text{not} &\equiv \lambda b. b \text{ fls} \text{ tru} \\ \text{and} &\equiv \lambda x y. x y \text{ fls} \\ \text{or} &\equiv \text{???} \quad (\text{упражнение}) \end{aligned}$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства условного выражения выполняются:

$$\begin{aligned}\text{if tru } v w &= v; \\ \text{if fls } v w &= w.\end{aligned}$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства логического оператора «И» выполняются:

$$\begin{aligned}\text{and tru } w &= w; \\ \text{and fls } w &= \text{fls}.\end{aligned}$$

- Попробуйте найти более «короткую» версию оператора «НЕ».
 ► Реализуйте оператор «ИЛИ».

Пару (двухэлементный кортеж) можно определить так:

$$\text{pair} \equiv \lambda x y f. f x y$$

Стандартные операции для пары (проекции):

$$\begin{aligned}\text{fst} &\equiv \lambda p. p \text{ tru} \\ \text{snd} &\equiv \lambda p. p \text{ fls}\end{aligned}$$

- Проверьте, что ожидаемые свойства проекций выполняются:

$$\begin{aligned}\text{fst } (\text{pair } a b) &= a; \\ \text{snd } (\text{pair } a b) &= b.\end{aligned}$$

Числа (нумералы Чёрча)

$$\begin{aligned}0 &\equiv \lambda s z. z \\ 1 &\equiv \lambda s z. s z \\ 2 &\equiv \lambda s z. s(s z) \\ 3 &\equiv \lambda s z. s(s(s z)) \\ 4 &\equiv \lambda s z. s(s(s(s z))) \\ &\dots\end{aligned}$$

Выражение $F^n(X)$, где $n \in \mathbb{N}$, а $F, X \in \Lambda$, определим индуктивно:

$$\begin{aligned}F^0(X) &\equiv X; \\ F^{n+1}(X) &\equiv F(F^n(X)).\end{aligned}$$

Тогда n -ое число Чёрча :

$$n \equiv \lambda s z. s^n(z).$$

Проверка числа на ноль ($0 \equiv \lambda s z. z$):

$$\text{iszro} \equiv \lambda n. n (\lambda x. \text{fls}) \text{ tru}$$

- ▶ Проверьте, что ожидаемые свойства `iszro` выполняются.
- ▶ Попробуйте найти более «короткую» версию `iszro`.

Функция следования для чисел Чёрча

$$\text{succ} \equiv \lambda n s z. s (n s z)$$

- ▶ Проверьте, что ожидаемые свойства `succ` выполняются.
- ▶ Попробуйте найти другое определение `succ`.

Функция сложения чисел Чёрча

$$\text{plus} \equiv \lambda m n s z. m s (n s z)$$

- ▶ Проверьте, что ожидаемые свойства `plus` выполняются.
- ▶ Попробуйте найти определение `plus` с использованием `succ`.

Функция умножения чисел Чёрча

$$\begin{aligned}\text{mult1} &\equiv \lambda m n. m (\text{plus} n) 0 \\ \text{mult2} &\equiv \lambda m n s z. m (n s) z\end{aligned}$$

- ▶ Проверьте, что ожидаемые свойства умножения выполняются.
- ▶ Можно ли `mult2` записать короче?

Домашнее задание

- Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:

$$\begin{aligned} [x \mapsto \lambda y. y w] & \quad \lambda y z. x y w (z x) \\ [x \mapsto \lambda z. z] & \quad \lambda x y. x y (\lambda x. x y) x \\ [y \mapsto x z] & \quad x y (\lambda x z. x y z) y \end{aligned}$$

Определите, возможно ли в получившемся терме выполнить β -преобразование, и, если это так, выполните его. (1 балл)

- Уберите лишние скобки и при возможности выполните β -преобразование

$$(x (\lambda x. ((x y) x)) y) \\ ((\lambda p. (\lambda q. ((q (p r)) s))) ((q (p r)) s))$$

(1 балл)

- Покажите, что для любых M и N выполняется

$$\lambda x. M N = S (\lambda x. M) (\lambda x. N)$$

(1 балл)

- Покажите, что

$$S K K = I \\ B = S (K S) K$$

(2 балла)

- Реализуйте функцию возведения в степень для чисел Чёрча. (2 балла)