# Функциональное программирование Лекция 3. Просто типизированное лямбда-исчисление

Денис Николаевич Москвин

Computer Science Center
Новосибирск

03.02.2020

# План лекции

# План лекции

# Что такое типы?

*Система типов — это гибко управляемый синтаксический метод доказательства отсутствия в программе определенных видов поведения при помощи классификации выражений языка по разновидностям вычисляемых ими значений.*

Бенджамин Пирс

- В $\lambda$-исчислении:
  - выражения — $\lambda$-термы;
  - вычисление — их редукция;
  - значения — (WH)NF.
- Типы — *синтаксические* конструкции, приписываемые термам по определённым правилам:

$$M : \sigma$$

# Для чего нужны типы?

- Типы дают частичную спецификацию

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad g : (\forall n : \mathbb{N}.\, \exists m : \mathbb{N}.\, m \leqslant n)$$

- Правильно типизированные программы не могут «сломаться». Робин Милнер (1978)

$$M : \sigma \;\wedge\; M \twoheadrightarrow v \;\Rightarrow\; v : \sigma$$

- Типизированные программы всегда завершаются. (это не всегда так :)
- Проверка типов отлавливает простые ошибки.

# Стрелочный тип в функциональных языках

- В большинстве систем типизации тождественной функции $\mathbf{I} \equiv \lambda x.\, x$ может быть приписан тип $\alpha \to \alpha$

$$\mathbf{I} : \alpha \to \alpha$$

- В общем случае $\alpha \to \beta$ является типом функции из $\alpha$ в $\beta$.
- Если имеется $y$ типа $\alpha$, являющийся аргументом функции $\mathbf{I}$, то выражение $\mathbf{I}\, y$ тоже имеет тип $\alpha$.
- Гипотезы о типе переменных записывают в контексте

$$y : \alpha \vdash (\mathbf{I}\, y) : \alpha$$

**Примеры (на некотором условном языке)**

$$\mathtt{sin} : \mathtt{Double} \to \mathtt{Double}$$

$$\mathtt{length} : \mathtt{Array} \to \mathtt{Int}$$

# Системы Карри и Чёрча

В $\lambda$-исчислении с типами выделяют два семейства систем типов.

## Системы в стиле Карри

Термы те же, что и в бестиповой теории. Каждый терм обладает множеством различных типов (пустое, одно- или многоэлементное, бесконечное).

## Системы в стиле Чёрча

Термы — аннотированные версии бестиповых термов. Каждый терм имеет тип (обычно уникальный), выводимый из способа, которым терм аннотирован.

# Два взгляда на системы типов

**Подход программиста**

Термы интерпретируются как программы, а типы — как их частичные спецификации.

- Системы в стиле Карри: неявная типизация (например, Haskell, Ocaml).
- Системы в стиле Чёрча: явная типизация (большинство типизированных языков).

**Логический подход**

Типы интерпретируются как высказывания, а термы — как их доказательства.

Связь между «вычислительными» и логическими системами называют ***соответствием Карри-Говарда***.

# План лекции

Самая простая система — это ***просто типизированное λ-исчисление*** ($\lambda_{\to}$ или Simple Type Theory (STT)).

## Определение

Множество типов $\mathbb{T}$ системы $\lambda_{\to}$ определяется индуктивно:

$$\alpha, \beta, \ldots \in \mathbb{T} \qquad \text{(переменные типа)}$$

$$\sigma, \tau \in \mathbb{T} \Rightarrow (\sigma \to \tau) \in \mathbb{T} \qquad \text{(типы пространства функций)}$$

- В абстрактном синтаксисе:

$$\mathbb{T} \;::=\; \mathbb{V} \mid (\mathbb{T} \to \mathbb{T})$$

  Здесь $\mathbb{V} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ — множество типовых переменных.
- Соглашение: $\alpha, \beta, \gamma$ используем для типовых переменных, а $\sigma, \tau, \rho$ — для произвольных типов.

# Соглашения и примеры

Стрелка *правоассоциативна*: если $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{T}$, то

$$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \ldots \to \sigma_n \;\equiv\; (\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \ldots \to (\sigma_{n-1} \to \sigma_n)\ldots))$$

$$(\alpha \to \beta) \equiv \alpha \to \beta$$
$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \equiv \alpha \to \beta \to \gamma$$
$$((\alpha \to \beta) \to \gamma) \equiv (\alpha \to \beta) \to \gamma$$

$$((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))) \equiv$$
$$(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$$

$$((\alpha \to \beta) \to (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta)) \equiv$$
$$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta$$

Всякий тип в $\lambda_\to$ может быть записан в виде

$$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \ldots \to \sigma_n \to \alpha$$

# Как приписать тип терму? (переменные и аппликация)

- Если терм ***переменная*** — как угодно:

$$x : \alpha$$
$$y : \alpha \to \beta$$
$$z : (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta$$

- Если терм ***аппликация*** $M\,N$, то
  - $M$ должно быть функцией, то есть иметь стрелочный тип $M : \sigma \to \tau$;
  - $N$ должно быть «подходящим» аргументом, то есть иметь тип $N : \sigma$;
  - вся аппликация при этом получит тип результата функции: $M\,N : \tau$.

$$\begin{array}{lcl} x{:}\alpha, y{:}\alpha \to \beta & \vdash & y\,x : \beta \\ x{:}\alpha, y{:}\alpha \to \beta, z{:}\beta \to \gamma & \vdash & z\,(y\,x) : \gamma \end{array}$$

А какие должны иметь типы $x$ и $y$, чтобы $x\,(y\,x){:}\gamma$?

# Как приписать тип терму? (абстракция)

- Если терм ***абстракция*** $\lambda x.\, M$, то
  - его тип должен быть стрелочным $\lambda x.\, M : \sigma \to \tau$;
  - тип аргумента $x$ должен быть $\sigma$;
  - тип тела абстракции $M$ должен быть $\tau$.
- Например, для $x{:}\alpha$ имеем $\lambda x.\, x : \alpha \to \alpha$
- Но писать $x{:}\alpha \ \vdash \ \lambda x.\, x : \alpha \to \alpha$ — плохая идея! Контекст глобален, а переменная $x$ локальна, и ее имя может использоваться многократно в разных областях видимости.
- Можно ли как-то указать, что переменная $x$ имеет тип $\alpha$?
  - Если не указать, то допустимо и $\lambda x.\, x : \beta \to \beta$ и даже $\lambda x.\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$ — стиль Карри.
  - Если указать $\lambda x^{\alpha}.\, x : \alpha \to \alpha$, то тип терма определяется однозначно — стиль Чёрча.
- Типизируйте по Чёрчу: $\lambda x^{?}.\, \lambda y^{?}.\, x\,(y\,x) : ?$

Правила ассоциативности для типов (вправо), аппликации (влево) и абстракции (вправо) хорошо согласованы друг с другом.

**В предположении $M\!:\!\alpha, N\!:\!\beta, P\!:\!\gamma, Q\!:\!\gamma$**

$$F : \alpha \to (\beta \to (\gamma \to \delta))$$

$$\begin{aligned} &F\,M : \beta \to (\gamma \to \delta) \\ &(F\,M)\,N : \gamma \to \delta \\ &((F\,M)\,N)\,P : \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lambda y^{\beta}.\,Q : \alpha \to \gamma \\ &\lambda x^{\alpha}.\,(\lambda y^{\beta}.\,Q) : \alpha \to (\beta \to \gamma) \end{aligned}$$

Зелёные скобки необязательны и обычно опускаются.

# План лекции

1. Понятие типа
2. Просто типизированное λ-исчисление
3. Формализм систем $\lambda_{\to}$
4. Свойства $\lambda_{\to}$

### Определение

Множество ***предтермов*** (или ***псевдотермов***) $\Lambda$ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и абстракции:

$$\begin{array}{rcl} x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda \\ M, N \in \Lambda & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda \\ M \in \Lambda, x \in V & \Rightarrow & (\lambda x.\,M) \in \Lambda \end{array}$$

- В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda \quad ::= \quad V \mid (\Lambda\,\Lambda) \mid (\lambda V.\,\Lambda)$$

- Предтермы системы в стиле Карри — это в точности термы бестипового $\lambda$-исчисления.

### Определение

Множество ***предтермов*** $\Lambda_\mathbb{T}$ строится из переменных из $V = \{x, y, z, \ldots\}$ с помощью аппликации и аннотированной типами абстракции:

$$
\begin{array}{rcl}
x \in V & \Rightarrow & x \in \Lambda_\mathbb{T} \\
M, N \in \Lambda_\mathbb{T} & \Rightarrow & (M\,N) \in \Lambda_\mathbb{T} \\
M \in \Lambda_\mathbb{T}, x \in V, \sigma \in \mathbb{T} & \Rightarrow & (\lambda x^\sigma .\, M) \in \Lambda_\mathbb{T}
\end{array}
$$

- В абстрактном синтаксисе

$$\Lambda_\mathbb{T} \quad ::= \quad V \mid (\Lambda_\mathbb{T}\,\Lambda_\mathbb{T}) \mid (\lambda V^\mathbb{T} .\, \Lambda_\mathbb{T})$$

- Все соглашения о скобках и ассоциативности те же, что и в системе $\Lambda$.

# Примеры предтермов

**Система $\lambda_{\to}$ а ля Карри:**

$$\lambda x\, y.\, x$$
$$\lambda f\, g\, x.\, f\,(g\,x)$$
$$\lambda x.\, x\, x$$

**Система $\lambda_{\to}$ а ля Чёрч:**

$$\begin{array}{lcl}
\lambda x^{\alpha}\, y^{\beta}.\, x & \equiv & \lambda x\!:\!\alpha.\, \lambda y\!:\!\beta.\, x \\
\lambda x^{\alpha}\, y^{\alpha}.\, x & \equiv & \lambda x\!:\!\alpha.\, \lambda y\!:\!\alpha.\, x \\
\lambda f^{\alpha}\, g^{\beta}\, x^{\gamma}.\, f\,(g\,x) & \equiv & \lambda f\!:\!\alpha.\, \lambda g\!:\!\beta.\, \lambda x\!:\!\gamma.\, f\,(g\,x) \\
\lambda f^{\beta\to\gamma}\, g^{\alpha\to\beta}\, x^{\alpha}.\, f\,(g\,x) & \equiv & \lambda f\!:\!(\beta \to \gamma).\, \lambda g\!:\!(\alpha \to \beta).\, \lambda x\!:\!\alpha.\, f\,(g\,x) \\
\lambda x^{\alpha}.\, x\, x & \equiv & \lambda x\!:\!\alpha.\, x\, x
\end{array}$$

## Определение

***Утверждение*** типизации в $\lambda_{\to}$ «а ля Карри» имеет вид

$$M : \tau$$

где $M \in \Lambda$ и $\tau \in \mathbb{T}$. Тип $\tau$ иногда называют ***предикатом***, а терм $M$ — ***субъектом*** утверждения.

Для $\lambda_{\to}$ «а ля Чёрч» надо лишь заменить $\Lambda$ на $\Lambda_{\mathbb{T}}$.

## Примеры утверждений типизации

| Система в стиле Карри | Система в стиле Чёрча |
|---|---|
| $\lambda x.\, x : \alpha \to \alpha$ | $\lambda x^{\alpha}.\, x : \alpha \to \alpha$ |
| $\lambda x.\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$ | $\lambda x^{\alpha \to \beta}.\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$ |
| $\lambda x\, y.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha$ | $\lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha$ |

# Объявления

**Определение**

***Объявление*** — это утверждение типизации с термовой переменной в качестве субъекта.

**Примеры объявлений**

$$
\begin{aligned}
&x : \alpha \\
&y : \beta \\
&f : \alpha \to \beta \\
&g : (\alpha \to \beta) \to \gamma
\end{aligned}
$$

# Контексты

## Определение

***Контекст*** — это множество объявлений с *различными* переменными в качестве субъекта:

$$\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_n : \sigma_n\}$$

Контекст иногда называют *базисом* или *окружением*.

- Фигурные скобки множества иногда опускают:

  $$\Gamma = x : \alpha, f : \alpha \to \beta, g : (\alpha \to \beta) \to \gamma \equiv x^{\alpha}, f^{\alpha \to \beta}, g^{(\alpha \to \beta) \to \gamma}$$

- Контексты можно ***расширять***, добавляя объявление *новой* переменной:

  $$\Delta = \Gamma, y^{\beta} = x^{\alpha}, f^{\alpha \to \beta}, g^{(\alpha \to \beta) \to \gamma}, y^{\beta}$$

- Контекст можно рассматривать как (частичную) функцию из множества переменных $V$ в множество типов $\mathbb{T}$.

Утверждение $M : \tau$ называется ***выводимым*** в контексте $\Gamma$, обозначение

$$\Gamma \vdash M : \tau$$

если его вывод может быть произведен по правилам:

$$\begin{array}{rcl}
x^{\sigma} \in \Gamma & \Rightarrow & \Gamma \vdash x : \sigma \\
\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau, \quad \Gamma \vdash N : \sigma & \Rightarrow & \Gamma \vdash M\,N : \tau \\
\Gamma, x^{\sigma} \vdash M : \tau & \Rightarrow & \Gamma \vdash \lambda x.\,M : \sigma \to \tau
\end{array}$$

Если существуют $\Gamma$ и $\tau$, такие что $\Gamma \vdash M : \tau$, то предтерм $M$ называют ***(допустимым) термом***.

# Типизация $\lambda_{\to}$ «а ля Карри» в виде деревьев вывода

| | |
|---|---|
| (аксиома) | $\Gamma \vdash x : \sigma$, если $x^{\sigma} \in \Gamma$ |
| $(\to E)$ | $\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}$ |
| $(\to I)$ | $\dfrac{\Gamma, x^{\sigma} \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.\, M : \sigma \to \tau}$ |

$$\dfrac{\dfrac{x^{\alpha}, y^{\beta} \vdash x : \alpha}{x^{\alpha} \vdash \lambda y.\, x : \beta \to \alpha}\,(\to I)}{\vdash \lambda x\, y.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha}\,(\to I)$$

Для любых $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$ верно $\vdash \lambda x\, y.\, x : \sigma \to \tau \to \sigma$.

Введем сокращение $\Gamma \equiv f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha}$ для повторяющегося контекста.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f : \beta \to \gamma \qquad \dfrac{\Gamma \vdash g : \alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash x : \alpha}{\Gamma \vdash g\,x : \beta}\,(\to E)}{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha} \vdash f\,(g\,x) : \gamma}\,(\to E)}{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta} \vdash \lambda x.\, f\,(g\,x) : \alpha \to \gamma}\,(\to I)}{f^{\beta\to\gamma} \vdash \lambda g\,x.\, f\,(g\,x) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)}{\vdash \lambda f\,g\,x.\, f\,(g\,x) : (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)
$$

# Типизация $\lambda_{\to}$ «а ля Чёрч» в виде деревьев вывода

(аксиома) $\quad \Gamma \vdash x : \sigma$, если $x^{\sigma} \in \Gamma$

$$(\to E) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,N : \tau}$$

$$(\to I) \qquad \frac{\Gamma, x^{\sigma} \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x^{\sigma}.\, M : \sigma \to \tau}$$

$$\cfrac{\cfrac{x^{\alpha}, y^{\beta} \vdash x : \alpha}{x^{\alpha} \vdash \lambda y^{\beta}.\, x : \beta \to \alpha}\,(\to I)}{\vdash \lambda x^{\alpha} y^{\beta}.\, x : \alpha \to \beta \to \alpha}\,(\to I)$$

Для **каждой** пары $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$ верно $\vdash \lambda x^{\sigma} y^{\tau}.\, x : \sigma \to \tau \to \sigma$.

# Пример дерева вывода для $\mathbf{B}$ в $\lambda_{\to}$ «а ля Чёрч»

Введем сокращение $\Gamma \equiv f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha}$ для повторяющегося контекста.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f : \beta \to \gamma \qquad \dfrac{\Gamma \vdash g : \alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash x : \alpha}{\Gamma \vdash g\,x : \beta}\,(\to E)}{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta}, x^{\alpha} \vdash f\,(g\,x) : \gamma}\,(\to E)}{f^{\beta\to\gamma}, g^{\alpha\to\beta} \vdash \lambda x^{\alpha}.\,f\,(g\,x) : \alpha \to \gamma}\,(\to I)}{f^{\beta\to\gamma} \vdash \lambda g^{\alpha\to\beta}\,x^{\alpha}.\,f\,(g\,x) : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)}{\vdash \lambda f^{\beta\to\gamma}\,g^{\alpha\to\beta}\,x^{\alpha}.\,f\,(g\,x) : (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,(\to I)
$$

# План лекции

# Технические леммы

## Лемма об инверсии (лемма генерации)

- $\Gamma \vdash x : \sigma \;\Rightarrow\; x^\sigma \in \Gamma$.
- $\Gamma \vdash M\,N : \tau \;\Rightarrow\; \exists \sigma\; [\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \;\wedge\; \Gamma \vdash N : \sigma]$.
- $\Gamma \vdash \lambda x.\, M : \rho \;\Rightarrow\; \exists \sigma, \tau\; [\Gamma, x^\sigma \vdash M : \tau \;\wedge\; \rho \equiv \sigma \to \tau]$.
  ($\lambda_\to$ а ля Карри)
- $\Gamma \vdash \lambda x^\sigma.\, M : \rho \;\Rightarrow\; \exists \tau\; [\Gamma, x^\sigma \vdash M : \tau \;\wedge\; \rho \equiv \sigma \to \tau]$.
  ($\lambda_\to$ а ля Чёрч)

## Лемма о типизируемости подтерма

Пусть $M'$ — подтерм $M$. Тогда $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma' \vdash M' : \sigma'$ для некоторых $\Gamma'$ и $\sigma'$.

То есть, если терм имеет тип, то каждый его подтерм тоже имеет тип.

Какой контекст требуется, чтобы произвести присваивание типов?

### Лемма «разбавления» (Thinning)

Пусть $\Gamma$ и $\Delta$ — контексты, причём $\Delta \supseteq \Gamma$. Тогда $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Delta \vdash M : \sigma$. *Расширение контекста не влияет на выводимость утверждения типизации.*

### Лемма о свободных переменных

$\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; FV(M) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma)$. *Свободные переменные типизированного терма должны присутствовать в контексте.*

### Лемма сужения

$\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \restriction FV(M) \vdash M : \sigma$. *Сужение контекста до множества свободных переменных терма не влияет на выводимость утверждения типизации.*

- Рассмотрим предтерм $x\,x$. Предположим, что это терм.
- Тогда имеются $\Gamma$ и $\tau$, такие что

$$\Gamma \vdash x\,x : \tau$$

- По лемме об инверсии существует такой $\sigma$, что правый подтерм $x : \sigma$, а левый подтерм (тоже $x$) имеет тип $o\sigma \to \tau$.
- По лемме о контекстах $x \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ и должен иметь там *единственное* связывание по определению контекста. То есть $\sigma = \sigma \to \tau$ — тип является подвыражением себя, чего не может быть, поскольку (*и пока*) типы конечны.

Предтермы $\boldsymbol{\omega} = \lambda x.\, x\,x$, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}\,\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{Y} = \lambda f\,.\,(\lambda x\,.\,f(x\,x))(\lambda x\,.\,f(x\,x))$ не имеют типа по лемме о типизируемости подтерма.

$$x^{\sigma} \nvdash x\,x : \tau, \quad \nvdash \boldsymbol{\omega} : \sigma, \quad \nvdash \boldsymbol{\Omega} : \sigma, \quad \nvdash \mathbf{Y} : \sigma.$$

## Определение

Для $\sigma, \tau \in \mathbb{T}$ ***подстановку*** $\tau$ вместо $\alpha$ в $\sigma$ обозначим $[\alpha \mapsto \tau]\sigma$.

$$[\alpha \mapsto (\gamma \to \gamma)](\alpha \to \beta \to \alpha) \;=\; (\gamma \to \gamma) \to \beta \to \gamma \to \gamma$$

## Лемма подстановки типа

$\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; [\alpha \mapsto \tau]\Gamma \vdash M : [\alpha \mapsto \tau]\sigma$. ($\lambda_{\to}$ Карри)

$\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; [\alpha \mapsto \tau]\Gamma \vdash [\alpha \mapsto \tau]M : [\alpha \mapsto \tau]\sigma$. ($\lambda_{\to}$ Чёрч)

## Подстановка $[\alpha \mapsto (\gamma \to \gamma)]$:

$$\begin{array}{rcl} x^{\alpha} & \vdash & \lambda y^{\alpha} z^{\beta} . x : \alpha \to \beta \to \alpha \quad \Rightarrow \\ x^{\gamma \to \gamma} & \vdash & (\lambda y^{\gamma \to \gamma} z^{\beta} . x) : (\gamma \to \gamma) \to \beta \to \gamma \to \gamma \end{array}$$

# Лемма подстановки *терма* для $\lambda_{\to}$

## Лемма подстановки терма

Пусть $\Gamma, x^{\sigma} \vdash M : \tau$ и $\Gamma \vdash N : \sigma$, тогда $\Gamma \vdash [x \mapsto N]M : \tau$.

То есть, подходящая по типу *подстановка терма сохраняет тип*.

## Пример

Берём утверждение о типизации

$$x^{\gamma \to \gamma} \ \vdash \ \lambda y^{\beta}.\, x : \beta \to \gamma \to \gamma$$

и подставляем в него вместо свободной переменной $x$ типа $\gamma \to \gamma$ терм $\lambda z^{\gamma}.\, z$ подходящего типа $\gamma \to \gamma$. Получаем

$$\vdash \ \lambda y^{\beta}\, z^{\gamma}.\, z : \beta \to \gamma \to \gamma$$

Что произойдет с деревом вывода типа при такой подстановке?

Лемма подстановки терма позволяет доказать теорему о сохранении типа в процессе вычислений.

**Теорема о редукции субъекта**

Пусть $M \twoheadrightarrow_{\beta} N$. Тогда $\Gamma \vdash M : \sigma \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash N : \sigma$.

- То есть *тип терма сохраняется при β-редукциях*.
- С вычислительной точки зрения это одно из ключевых свойств любой системы типов.

**Следствие**

Множество типизируемых в $\lambda_{\to}$ термов замкнуто относительно редукции.

В обратную сторону эта теорема (и следствие из нее) не верны для $\lambda_{\to}$.

**Теорема о единственности типа для $\lambda_{\to}$ а ля Чёрч**

Пусть $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash M : \tau$. Тогда $\sigma \equiv \tau$.

*Терм в $\lambda_{\to}$ а ля Чёрч имеет единственный тип.*

**Следствие**

Пусть $\Gamma \vdash M : \sigma$, $\Gamma \vdash N : \tau$ и $M =_{\beta} N$. Тогда $\sigma \equiv \tau$.

*Типизируемые $\beta$-конвертируемые термы имеют одинаковый тип в $\lambda_{\to}$ а ля Чёрч.*

**Контрпример для системы а ля Карри**

Оба типа подходят для $\mathbf{K} = \lambda x\, y.\, x$ в $\lambda_{\to}$ а ля Карри:

$$\vdash \lambda x\, y.\, x : \alpha \to (\delta \to \gamma \to \delta) \to \alpha$$
$$\vdash \lambda x\, y.\, x : (\gamma \to \gamma) \to \beta \to \gamma \to \gamma$$

Для систем в стиле Карри единственности типа нет.

# Связь между системами Карри и Чёрча

- Можно задать стирающее отображение $|\cdot| : \Lambda_{\mathbb{T}} \to \Lambda$:

$$\begin{array}{rcl} |x| & \equiv & x \\ |M\,N| & \equiv & |M|\,|N| \\ |\lambda x^{\sigma}.\,M| & \equiv & \lambda x.\,|M| \end{array}$$

- Все атрибутированные типами термы из версии Чёрча $\lambda_{\to}$ «проектируются» в термы в версии Карри:

$$M \in \Lambda_{\mathbb{T}} \ \wedge \ \Gamma \vdash_{\text{ч}} M : \sigma \ \Rightarrow \ \Gamma \vdash_{\text{к}} |M| : \sigma$$

- Термы из версии Карри $\lambda_{\to}$ могут быть «подняты» в термы из версии Чёрча:

$$M \in \Lambda \ \wedge \ \Gamma \vdash_{\text{к}} M : \sigma \ \Rightarrow \ \exists N \in \Lambda_{\mathbb{T}} \, [\Gamma \vdash_{\text{ч}} N : \sigma \ \wedge \ |N| \equiv M]$$

- Для произвольного типа $\sigma \in \mathbb{T}$ выполняется

$$\sigma \text{ обитаем в } \lambda_{\to}\text{-Карри} \ \Leftrightarrow \ \sigma \text{ обитаем в } \lambda_{\to}\text{-Чёрч}$$

# Проблемы разрешимости

- Есть ли алгоритм, который позволяют решить задачу?

| | | |
|---|---|---|
| $\vdash M : \sigma ?$ | Задача проверки типа | ЗПТ |
| | Type Checking Problem | TCP |
| $\vdash M : ?$ | Задача синтеза типа | ЗСТ |
| | Type Synthesis (or Assgnment) Problem | TSP, TAP |
| $\vdash ? : \sigma$ | Задача обитаемости типа | ЗОТ |
| | Type Inhabitation Problem | TIP |

- Для $\lambda_{\rightarrow}$ (и в стиле Чёрча, и в стиле Карри) все эти задачи разрешимы.
- ЗПТ выглядит проще ЗСТ, но в системах Карри они эквивалентны: проверка $M\,N : \sigma ?$ требует синтеза $N : ?$.

# Слабая и сильная нормализация

**Определение**

Терм называют ***слабо (weak) нормализуемым*** (WN), если существует последовательность редукций, приводящих его к нормальной форме.

**Определение**

Терм называют ***сильно (strong) нормализуемым*** (SN), если любая последовательность редукций, приводит его к нормальной форме.

**Примеры**

Терм $\mathbf{K\,I\,K}$ — сильно нормализуем,
терм $\mathbf{K\,I}\,\Omega$ — слабо нормализуем,
терм $\Omega$ — не нормализуем.

**Определение**

Систему типов называют ***слабо нормализуемой*** если все её допустимые термы слабо нормализуемы.

**Определение**

Систему типов называют ***сильно нормализуемой*** если все её допустимые термы сильно нормализуемы.

**Теорема о нормализации $\lambda_{\to}$**

Обе системы $\lambda_{\to}$ (и Карри, и Чёрча) *сильно нормализуемы*.

То есть любой допустимый терм в $\lambda_{\to}$ всегда редуцируется к нормальной форме.